Лекция 7. Кошидің интегралдық формуласы.

Жоспар:

1. Коши интегралы
2. Кошидың интегралдық формуласы
3. Теорема
4. Мысалдар

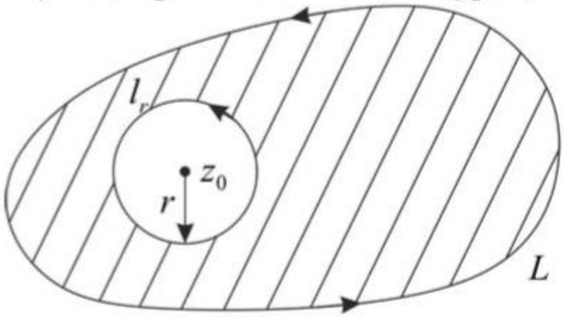
Теорема. Егер $f(z)$ функциясы L қисығымен шектелген тұйық $\overline{D}$ облысында аналитикалық болса, онда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz \qquad (9.1)$$

мұнда $z_0 \in D$, $L-$ қисығының бойымен интегралдау оң бағытта (сағат бағытына қарсы)

(9.1) – теңдіктің оң жағындағы интеграл *Коши интегралы* деп, ал (9.1) – формуласы *Кошидің интегралдық формуласы* деп аталады.

Дәлелдеу. Центрі z_0 нүктесінде жататын радиусы $r-$ ге тең, толығымен L қисығында жататын l_r шеңберін сызайық. (15-сурет)



15-сурет

Сонда шекарасы L қисығы және l_r шеңбері болатын екібайланысты D_1 облысын аламыз. Бұл D_1 облысында $\frac{f(z)}{z - z_0}$ функциясы аналитикалық болады. Онда Коши теоремасы бойынша

$$\oint_L \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \oint_{l_r} \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

Соңғы интегралды түрлендірейік

$$\oint_{l_r} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \oint_{l_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz + \oint_{l_r} \frac{f(z_0)}{z - z_0}dz$$

$l_r -$ центрі z_0 нүктесі болатын радиусы $r-$ ге тең шеңбер болғандықтан, $z = z_0 + re^{it}$ (шеңбердің параметрлік теңдеуі), демек

$$\oint_{l_r} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}dt = 2\pi i$$

Олай болса

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz = f(z_0) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{l_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz$$

Соңғы теңдіктегі айырманы бағалайық. Аналитикалық $f(z)$ функциясы үзіліссіз болғандықтан, $\forall \varepsilon > 0$ үшін $\exists r > 0$, $|z - z_0| \le r$ болғанда $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ орындалады.

Демек,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{l_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{l_r}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}dz \le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{r}\cdot 2\pi r = \varepsilon$$

Демек (9.1) теңдік орындалады.

Ескерту. Жоғарыдағы дәлелдеу көпбайланысты облыс үшін де орындалады.

Кошидің интегралдық формуласының салдары:

1) Егер z_0 нүктесі L қисығының ішінде жатпаса, онда $\frac{f(z)}{z-z_0}$ функциясы D облысында аналитикалық, демек L қисығының бойымен интегралы нөлге тең:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \begin{cases} f(z_0), & егер \quad z_0 \in D \\ 0, & егер \quad z_0 \notin D \end{cases} \tag{9.2}$$

2) $f(z)$ функциясы бірбайланысты D облысында аналитикалық болсын. $z_0 \in D$. Центрі z_0 нүктесі болатын радиусы R_0 – ге тең шеңбер қарастырайық.

Коши формуласы бойынша

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_{R_0}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

Егер $z = z_0 + R_0e^{i\varphi}$ деп қарастырсақ, онда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + R_0e^{i\varphi})d\varphi \tag{9.3}$$

Демек, функцияның шеңбердің центріндегі мәні шекарадағы мәндерініңорташа мәніне тең.

Бұл формуланы *орта мән формуласы* деп атайды.

Теорема. Егер $f(z)$ функциясы D облысында аналитикалық жәнетұйық $\overline{D}$ облысында үзіліссіз болса, онда D облысында $f(z)$ функциясының барлық туындылары бар және $n-$ ретті туындысы келесі формуламен анықталады:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \tag{9.4}$$

мұнда L қисығы D облысының шекарасы.

Дәлелдеу. $z_0 \in D.$ Туындының анықтамасын және Коши формуласын ескерсек, онда

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\int_L f(z)\cdot\left(\frac{1}{z-z_0-\Delta z}-\frac{1}{z-z_0}\right)dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\Delta z\to 0}\int_L\frac{f(z)\cdot\Delta z dz}{\Delta z(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}$$

$n=1$ үшін теорема дәлелденді.

$n-1$ үшін

$$f^{(n-1)}(z_0)=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^n}$$

формуласы орындалады деп есептеп, n үшін (9.4) формуласын дәлелдейік.

Демек,

$$f^{(n)}(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f^{(n-1)}(z_0+\Delta z)-f^{(n-1)}(z_0)}{\Delta z}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\int_L f(z)\left(\frac{1}{(z-z_0-\Delta z)^n}-\frac{1}{(z-z_0)^n}\right)dz=$$

$$=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\int_L f(z)\cdot\frac{(z-z_0)^n-(z-z_0-\Delta z)^n}{(z-z_0-\Delta z)^n(z-z_0)^n}dz.$$

Егер $(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+...+b^n$ формуласын ескерсек, онда

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\int_L f(z)\left[\frac{(z-z_0)^n-((z-z_0)^n-n(z-z_0)^{n-1}\cdot\Delta z+\frac{n(n-1)}{2}(z-z_0)^{n-2}(\Delta z)^2-...+(-1)^n(\Delta z)^n)}{(z-z_0-\Delta z)^n(z-z_0)^n}\right]dz=$$

$$=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\int_L f(z)\left[\frac{n(z-z_0)^{n-1}\cdot\Delta z-\frac{n(n-1)}{2}(z-z_0)^{n-2}\cdot(\Delta z)^2+...+(-1)^{n-1}\cdot(\Delta z)^n}{(z-z_0-\Delta z)^n(z-z_0)^n}\right]dz$$

Бөлшектің алымы мен бөлімін $\Delta z-$ ке қысқартып, $\Delta z\to 0$ шекке көшсек, онда

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

Теорема дәлелденді.

1-мысал. Кошидің интегралдық формуласын қолданып келесі интегралды есептеңіз:

$$\int_L \frac{e^{\frac{\pi}{2}z^3}}{z^2-(1-2i)z-2i}dz,$$

мұнда 1) $L:|z|=\frac{1}{2}$, 2) $L:|z|=\frac{3}{2}$, 3) $L:|z|=3$.

Шешуі. 1) $z^2-(1-2i)z-2i=0$ квадрат теңдеуінің түбірлерін табу үшін дикриминантын есептейік.

$$D=(1-2i)^2+8i=1-4i-4+8i=1+4i-4=(1+2i)^2$$

Демек, квадрат теңдеудің түбірлері:

$$z_{1,2}=\frac{1-2i\pm(1+2i)}{2}=\left[\begin{array}{l}1\\-2i\end{array}\right.$$

Бұл нүктелер $|z|=\frac{1}{2}$ шеңберінің ішінде жатпайды, олай болса интеграл астында тұрған өрнек аналитикалық функция.

Онда Коши теоремасы бойынша

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{\pi}{2}z^3}}{(z-1)(z+2i)}dz = 0$$

Жауабы: 0

2) $|z|=\dfrac{3}{2}$ шеңберінің ішінде тек $z=1$ нүктесінде берілген функцияның бөлімі нөлге тең. Онда интегралды келесі түрде жазамыз:

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{\pi}{2}z^3}}{(z-1)(z+2i)}dz = \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}z^3}}{z+2i}}{(z-1)}dz$$

$f(z)=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}z^3}}{z+2i}$ функциясы $|z|=\dfrac{3}{2}$ шеңберінің ішінде аналитикалық, олай болса (9.1) интегралдық Коши формуласын қолданамыз $(z_0=1)$:

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}z^3}}{z+2i}}{(z-1)}dz = 2\pi i\left.\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}z^3}}{z+2i}\right)\right|_{z=1} = 2\pi i\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{1+2i} = \frac{2\pi}{5}e^{\frac{\pi}{2}}(2+i)$$

Жауабы: $\dfrac{2\pi}{5}e^{\frac{\pi}{2}}(2+i)$

3) $|z|=3$ шеңберінің ішіндегі $z=1$ және $z=-2i$ нүктелерінде берілген функцияның бөлімі нөлге тең. Сондықтан (9.1) формуланы бірден қолдану мүмкін емес.

Бұл жағдайда интегралды есептеу үшін келесі әдістерді қолданамыз.

1-әдіс. $\dfrac{1}{(z-1)(z+2i)}$ бөлшегін анықталмаған коэффициенттер әдісімен жай бөлшектерге жіктейміз.

$$\frac{1}{(z-1)(z+2i)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2i} = \frac{Az+2Ai+Bz-B}{(z-1)(z+2i)}$$

Алымдарын теңестірейік

$$(A+B)z+2Ai-B=1$$

Сонымен келесі жүйені шешу керек

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2Ai-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ (-2i-1)B=1 \end{cases} \begin{cases} B=\dfrac{-1+2i}{5} \\ A=\dfrac{1-2i}{5} \end{cases}$$

Интегралға қойсақ, онда

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{\frac{\pi}{2}z^3}}{(z-1)(z+2i)}dz = \frac{1-2i}{5}\cdot\int_{|z|=3}\frac{e^{\frac{\pi}{2}z^3}}{z-1}dz +$$

$$+\frac{-1+2i}{5}\int\limits_{|z|=3}\frac{e^{\frac{\pi}{2}z^3}}{z+2i}dz=2\pi i\cdot\frac{1-2i}{5}e^{\frac{\pi}{2}}++2\pi i\left(\frac{-1+2i}{5}\right)\cdot e^{\frac{\pi}{2}(-2i)^3}=$$

$$=\frac{2\pi}{5}e^{\frac{\pi}{2}}(2+i)-\frac{2\pi}{5}(2+i)e^{4\pi i}=\frac{2\pi}{5}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)(2+i)$$

2-әдіс. Центрлері $z=1$ және $z=-2i$ нүктелері болатын, өзара қиылыспайтындай және толығымен $|z|\le 3$ дөңгелегінің ішінде жататындай, радиустарын өте кіші етіп сәйкес γ_1 және γ_2 шеңберлерін сызайық.

$|z|=3,$ γ_1 және γ_2 шеңберлерімен шектелген үшбайланысты облыста берілген функция аналитикалық болады. Онда көпбайланысты облыс үшін Коши теоремасы бойынша

$$\int\limits_{|z|=3}\frac{e^{\frac{\pi}{2}z^3}}{(z-1)(z+2i)}dz=\int\limits_{\gamma_1}\frac{\frac{e^{\frac{\pi}{2}z^3}}{z+2i}}{z-1}dz+\int\limits_{\gamma_2}\frac{\frac{e^{\frac{\pi}{2}z^3}}{z-1}}{z+2i}dz$$

Әр интегралға (9.1) Кошидің интегралдық формуласын қолдансақ, онда

$$\int\limits_{|z|=3}\frac{e^{\frac{\pi}{2}z^3}}{(z-1)(z+2i)}dz=2\pi i\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{1+2i}+2\pi i\frac{e^{\frac{\pi}{2}(-2i)^3}}{-2i+1}=$$

$$=2\pi i\frac{(1-2i)}{5}e^{\frac{\pi}{2}}+2\pi i\frac{(-1+2i)}{5}e^{4\pi i}=$$

$$=\frac{2\pi}{5}e^{\frac{\pi}{2}}(2+i)+\frac{2\pi}{5}(-2-i)=\frac{2\pi}{5}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)(2+i)$$

Жауабы: $\frac{2\pi}{5}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)(2+i)$

2-мысал. Интегралды есептеңіз:

$$\int\limits_{|z-2i|=1}\frac{sh\frac{\pi}{z}}{(z^2+4)^2}dz$$

Шешуі. $f(z)=\dfrac{sh\frac{\pi}{z}}{(z^2+4)^2}$ функциясы $|z-2i|=1$ облысында, $z_0=2i$ нүктесінен басқа нүктелердің барлығында аналитикалық болады, олай болса бұл функцияны келесі түрде жазамыз:

$$\frac{sh\frac{\pi}{z}}{(z^2+4)^2}=\frac{\frac{sh\frac{\pi}{z}}{(z+2i)^2}}{(z-2i)^2}$$

(9.4) формуласында $f(z)$ функциясы ретінде $\dfrac{sh\frac{\pi}{z}}{(z+2i)^2}$ өрнегін аламыз және $n=1$ болғанда

$$\oint_{|z-2i|=1} \frac{\dfrac{sh\dfrac{\pi}{z}}{(z+2i)^2}}{(z-2i)^2}dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{sh\dfrac{\pi}{z}}{(z+2i)^2} \right)'\Bigg|_{z=2i}$$

Туындысын есептейік

$$\left(\frac{sh\dfrac{\pi}{z}}{(z+2i)^2} \right)'\Bigg|_{z=2i} = \frac{ch\dfrac{\pi}{z}\cdot(-\dfrac{\pi}{z^2})\cdot(z+2i) - 2sh\dfrac{\pi}{z}}{(z+2i)^3}\Bigg|_{z=2i} =$$

$$= \frac{ch(-\dfrac{\pi}{2}i)\cdot\dfrac{\pi}{4}\cdot 4i - 2sh(-\dfrac{\pi}{2}i)}{(4i)^3}$$

Алдыңғы параграфтардан белгілі

$$chiz = \cos z, \;\; shiz = i\sin z,$$

формулаларын ескерсек, онда

$$\left(\frac{sh\dfrac{\pi}{z}}{(z+2i)^2} \right)'\Bigg|_{z=2i} = \frac{\cos\dfrac{\pi}{2}\cdot\pi i + 2i\sin\dfrac{\pi}{2}}{-64i} = -\frac{1}{32}$$

Демек,

$$\oint_{|z-2i|=1} \frac{sh\dfrac{\pi}{z}}{(z^2+4)^2}dz = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{32}\right) = -\frac{\pi}{16}i$$

Жауабы: $-\dfrac{\pi}{16}i$

3-мысал. Интегралды есептеңіз:

$$\oint_{|z|=3} \frac{\sin\dfrac{\pi}{z}z}{(z-2)^3(z+2)}dz$$

Шешуі: *1-әдіс.* Интеграл астындағы функцияның бөлімі $(z-2)^3(z+2)$ өрнегі $|z|\le 3$ дөңгелегінің ішінде $z=2$ және $z=-2$ нүктелерінде нөлге тең. Берілген функцияны жай бөлшектерге жіктейміз.

$$\frac{1}{(z-2)^3(z+2)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{(z-2)^2} + \frac{C}{(z-2)^3} + \frac{D}{z+2} =$$

$$= \frac{A(z-2)^2(z+2) + B(z-2)(z+2) + C(z+2) + D(z-2)^3}{(z-2)^3(z+2)};$$

Бөлшектің алымдарын теңестіреміз:

$$Az^3 - 2Az^2 - 4Az + 8A + Bz^2 - 4B + Cz + 2C + Dz^3 - 6Dz^2 + 12D - 8D = 1$$

$z-$ тің дәрежесі бойынша теңестірсек, келесі жүйеге келеміз:

$$z^3 \;:\; A + D = 0;$$
$$z^2 \;:\; -2A + B - 6D = 0;$$
$$z \;:\; -4A + C + 12D = 0;$$
$$z^0 \;:\; 8A - 4B + 2C - 8D = 1;$$

Бұдан $D = -\frac{1}{64},\; A = \frac{1}{64},\; C = \frac{1}{4},\; B = -\frac{1}{16};$

Демек,

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-2)^3(z+2)}dz = \frac{1}{64}\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-2}dz -$$

$$-\frac{1}{16}\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-2)^2}dz + \frac{1}{4}\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-2)^3}dz - \frac{1}{64}\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+2}dz.$$

Бірінші және төртінші интегралға (9.1) формуласын қолданамыз.

$$\frac{1}{64}\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-2}dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{64}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{32}i$$

$$-\frac{1}{64}\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+2}dz = -2\pi i \cdot \frac{1}{64}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{32}i$$

Екінші және үшінші интегралға (9.4) формуласын $n=1$ және $n=2$ жағдайында қолданамыз.

$$-\frac{1}{16}\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-2)^2}dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{16}\right)\left(\sin\frac{\pi}{4}z\right)'\Bigg|_{z=2} = -\frac{\pi^2 i}{32}\cos\frac{\pi}{4}z\Bigg|_{z=2} = 0,$$

$$\frac{1}{4}\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-2)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}\cdot\frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{4}z\right)''\Bigg|_{z=2} = \frac{\pi^2 i}{16}\left(\cos\frac{\pi}{4}z\right)'\Bigg|_{z=2} = -\frac{\pi^3 i}{64}\sin\frac{\pi}{4}z\Big|_{z=2} = -\frac{\pi^3 i}{64}.$$

Барлығын қоссақ, нәтижесінде есептің жауабын аламыз:

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-2)^3(z+2)}dz = \frac{\pi}{32}i + \frac{\pi}{32}i - \frac{\pi^3 i}{64} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{\pi^3}{64}\right)\cdot i;$$

2-әдіс. Центрлері $z=2$ және $z=-2$ нүктелері болатын, өзара қиылыспайтындай және толығымен $|z|\le 3$ дөңгелегінің ішінде жататындай,радиустарын өте кіші етіп сәйкес γ_1 және γ_2 шеңберлерін сызайық. $|z|=3,\ \gamma_1$ және γ_2 шеңберлерімен шектелген үшбайланысты облыста берілген функция аналитикалық болады. Демек, көпбайланысты облыс үшін Коши теоремасы бойынша

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-2)^3(z+2)}dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+2}}{(z-2)^3}dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-2)^3}}{z+2}dz$$

Бірінші интегралға (9.4), ал екінші интегралға (9.1) формулаларын қолданып келесі теңдікті аламыз.

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-2)^3(z+2)}dz = \frac{2\pi i}{2!}\left.\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+2}\right)''\right|_{z=2} + 2\pi i\left.\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-2)^3}\right|_{z=-2} =$$

$$= \pi i\left.\left(\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}z\cdot(z+2)^{-1} + \sin\frac{\pi}{4}z\cdot(-1)(z+2)^{-2}\right)'\right|_{z=2} + 2\pi i\frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{(-4)^3} =$$

$$= \pi i\left.\left(-\frac{\pi^2}{16}\sin\frac{\pi}{4}z\cdot(z+2)^{-1} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}z\cdot(z+2)^{-2} + 2\sin\frac{\pi}{4}z\cdot(z+2)^{-3}\right)\right|_{z=2} + \frac{\pi i}{32} =$$

$$= \pi i\left(-\frac{\pi^2}{64} + \frac{1}{32}\right) + \frac{\pi}{32}i = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{\pi^3}{64}\right)\cdot i$$

Жауабы: $\left(\frac{\pi}{16} - \frac{\pi^3}{64}\right)i$

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Төлегенова М. Б., Қойлышев У.Қ. Комплекс айнымалы функциялар теориясы және Амалдық есептеу. Оқу құралы. Қазақ ун-ті, 2021. Қазақша, орысша, ағылшынша.
2. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991 (предыдущие издания 1965, 1967).
3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. М.: Наука, 1985. (Предыдущие издания: 1968, 1976).
4. Сборник задач по теории аналитических функций. Под ред. М.А. Евграфова. Изд. 2-е доп. М.: Наука,1972.
5. Кангужин Б.Е. Теория функций комплексного переменного. Алматы. Қазақ университеті, 2007.